

Aplicación de las técnicas de homogenización al análisis de placas ortotropas.

Profs. Miguel Lobo y Avelino Samartín.

Universidad de Santander.

1.- INTRODUCCION

Existen en la Ingeniería numerosos ejemplos de estructuras que pueden ser modelizadas mediante placas y lajas ortotropas. Algunas de estas situaciones corresponden a los tableros de puentes de viga y los tableros losa aligerada (figura 1). En estos casos, se simula el comportamiento estructural originado por la diferente geometría (disposición de vigas y alveolos) en los sentidos longitudinal y transversal mediante la introducción de un material con características ortotropas en una losa homogénea ficticia que se denomina losa ortótropa. Una extensiva bibliografía sobre el tema existe en la Ingeniería Civil, comenzando la década de los años 40 por Guyon y Massonet, y que todavía no puede suponerse finalizada. Una revisión y exposición del método de cálculo estructural de puentes mediante el procedimiento de la losa ortótropa puede verse en (1).

Una de las mayores dificultades que existe en la aplicación del método de la losa ortótropa a situaciones reales de puente reside en la carencia de unas técnicas adecuadas y racionales de obtención de las características del material ortótropa que mejor simulen el comportamiento estructural producido por la diferente geometría de tablero. En efecto, los procedimientos actuales son de tipo heurístico es decir intuitivos y muy dependientes del tipo de sección (transversal y longitudinal) y para los cuales no existe un fundamento teórico adecuado ni una justificación de su bondad respecto a otras alternativas.

En este artículo se intenta deducir de un modo coherente las características de ortotropía de una losa equivalente a otra cuyas características geométricas son periódicas. Para ello se basaran en los resultados deducidos en las ya bien establecidas técnicas de homogeneización. Estas técnicas de homogeneización consisten fundamentalmente en aplicar un desarrollo asintótico a la solución del problema. Se supone que dicho desarrollo depende de dos escalas una de las cuales va a definir el comportamiento global (macroscópico) de la estructura. En la otra escala va a intervenir un parámetro que dará cuenta de las dimensiones de la célula geométrica que se repite periódicamente (en ambas direcciones). Si admite que el primer término del desarrollo asintótico no depende de los planos celulares. Este primer término del desarrollo permitirá deducir las características de ortotropía del material que mas adecuadamente simula la configuración geométrica de las estructuras. Detalles de estas técnicas de homogeneización pueden verse en numerosas publicaciones entre las que destacan (2) y (3).

En este artículo se intenta mostrar las potencialidades de la técnica de homogeneización a la resolución de este tipo de problemas de modelación y caracterización estructural de construcciones reales. Con objeto de simplificar la exposición se va a tratar el problema muy simple de una losa nervada sometida a un conjunto de acciones dentro de un plano (laja). Las direcciones de los nervios se suponen en principio ortogonales entre sí. Se mostraran primeramente las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de la laja. A continuación se hará un breve resumen de las técnicas de homogeneización en general. Por último la aplicación de las mismas al caso concreto de la laja nervada conducirá a la determinación de las constantes de ortotropía del material de la losa ortótropa ficticia que mas coherentemente permite simular la estructura real.

2.- ECUACION GENERAL DE LA LAJA

2.1.- TEORIA DE LA HOMOGENEIZACION

Sea Ω una región ocupada por un material no homogéneo de estructura periódica cuyo periodo, pequeño en relación a las dimensiones de la región lo denotaremos por ϵ .

Una situación sencilla de como se plantea un problema de homogeneización, haciendo intervenir la ε -periodicidad, puede ser la siguiente:

Se considera sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un operador diferencial de 2° orden, A_ε , y se plantea la ecuación

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = f \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2.1)$$

$$u^\varepsilon|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

donde
$$A_\varepsilon u = -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u\right) = f \quad (2.3)$$

y Γ es la frontera del (2.3) abierto. Por otra parte la función $a(y)$, $y = x/\varepsilon$, es una función definida en \mathbb{R}^2 Y -periódica donde Y representa un cuadrado de dimensión la unidad $Y = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ y de lados paralelos a los ejes.

Así la función $a(x/\varepsilon)$ es una función εY -periódica, de periodo un cuadrado de dimensión de sus lados ε , obtenidos a partir de Y homotéticamente a partir de Y . (Ver figura 1).

Se tiene planteado así mediante las relaciones (2.1), (2.2) un modelo matemático del comportamiento de un material no-homogéneo, de estructura periódica. De hecho, es una familia de problemas dependientes de ε , y se desea obtener una descripción aproximada de la solución del problema, mediante otro problema independiente de ε ; es decir, donde no aparezca la estructura periódica del material no-homogéneo.

A ese comportamiento aproximado o comportamiento límite se le llamará problema homogeneizado, que vendrá dado por un operador A_0 mediante un problema del tipo

$$A_0 u = f \quad (2.4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (2.5)$$

donde A_0 será un operador diferencial de 2° orden.

2.2.- METODO DE DOBLE ESCALA

Existen varios métodos para homogeneizar un problema como el dado en (2.1), (2.2), aquí se va a describir uno de ellos, el método de doble escala.

Antes de nada, conviene hacer la observación siguiente, que sin duda es importante. Puede parecer a la vista del problema (2.1), (2.2) y dado que existe convergencia de

$$a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{Y} \int_Y a(y) dy = m(a) = \tilde{a} \quad \text{en } L^\infty(\Omega) \quad \text{debil}^*,$$

la solución u_ε del problema (2.1), (2.2) debiera converger hacia la solución del problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(m(a) \nabla u) &= -m(a) \Delta u = f \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

esto no es cierto, ni siquiera en dimensión $n=1$.

El problema:

$$\frac{d}{dx} \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du}{dx} \right) = f \quad \text{en} \quad]x_0, x_1[$$

$$u^\varepsilon(x_0) = u^\varepsilon(x_1) = 0$$

converge hacia la solución

$$-\frac{1}{m(\frac{1}{a})} \frac{d^2 u}{dx^2} = f$$

$$u(x_0) = u(x_1) = 0$$

El método de doble escala, dentro del análisis asintótico, consiste en lo siguiente: Se postula un desarrollo asintótico formal del tipo siguiente:

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (2.6)$$

siendo $y = (y_1, y_2)$, $y = \frac{x}{\varepsilon}$, y donde $u^1, u^2 \dots u^n$, tienen una dependencia Y-periodica en y, excepto el primer término que da cuenta del comportamiento homogeneizado.

El significado de este desarrollo, en cuanto a las funciones $u^1(x, y)$, es el siguiente. Estas funciones $u^1(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ε -Y-periodicas en x, son tales que sobre periodos adyacentes, pueden tomar valores muy diferentes debido a la disposición dentro del período, incluso cuando, por una eventual regularidad de las funciones su dependencia en x dé valores muy próximos entre sí.

A continuación, se sustituye en la ecuación (2.1), (2.2) formalmente, y se tiene en cuenta la regla de derivación:

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.7)$$

Teniendo presente todo esto se llega a las siguientes relaciones para los u^0 y u^1 .

$$\text{Orden } \varepsilon^{-1} - \frac{\partial}{\partial y_i} \{a(y) \left\{ \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u^1}{\partial y_i}(x, y) \right\}\} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Orden } \varepsilon^0 - \frac{\partial p_1^0}{\partial x_i} = f \quad (2.9)$$

donde

$$p_i^0(x, y) = a(y) \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right) \quad (2.10)$$

Se observa que la ecuación (2.9) es una ecuación en x.

2.3.- PROBLEMA LOCAL

La ecuación (2.8) conduce a la ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \frac{\partial a}{\partial y_j}(y) \quad u^1, \text{ Y-periodica} \quad (2.11)$$

y se puede escribir la solución en la forma

$$u^1(x, y) = \frac{\partial u^0}{\partial x_R} w^R(y) + C(x) \quad (2.12)$$

$C(x)$ función de x indeterminada, que puede ser fijada mediante la relación $w^R(y) = 0$.

2.4.- PROBLEMA HOMOGENEIZADO

Se intenta ahora escribir la ecuación (2.9) en términos de u^0 , y de la expresión de u^1 , obtenida en (2.12) y se llega a un problema con coeficientes constantes del tipo

$$-\operatorname{div}(A_0 \cdot \nabla u^0) = f$$

$$u^0|_{\Gamma} = 0$$

de donde A_0 es la matriz $A_0 = (A_{iR})$, $A_{iR} = \{a(y) (1 + \frac{\partial w^R}{\partial y_i}(y))\} \sim$

2.5.- COMENTARIOS

Diversos resultados han sido dados sobre aplicaciones de la homogeneización, para muchos tipos de expresiones y sistemas, en Mecánica de Sólidos, en Mecánica de Fluidos, Ecuaciones de Maxwell, etc. En los libros citados en la introducción se da una amplia bibliografía sobre estos temas.

En relación a los métodos numéricos tenemos conocimientos de determinadas experiencias hechas por BOURGAT-LANCHON, BOURGAT-DERVIEUX a lo largo de varios Reports del I.N.R.I.A. (4), (5).

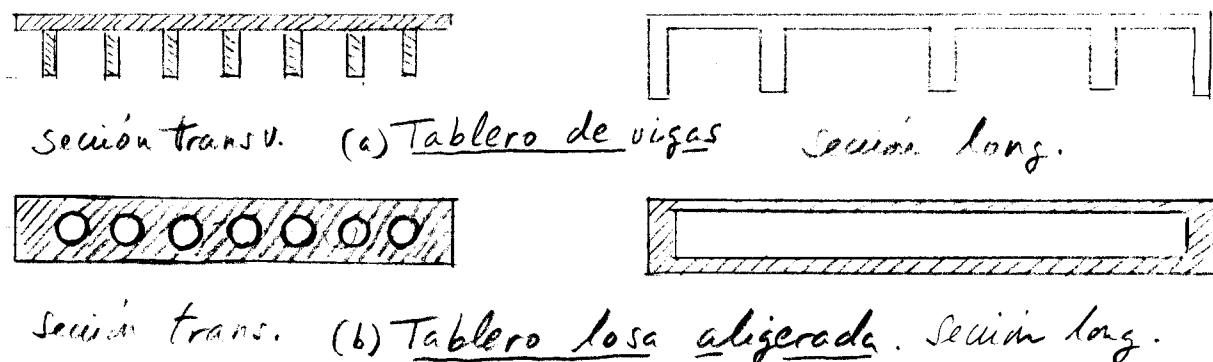


FIGURA 1 - LOSAS ORTOTROPAS.

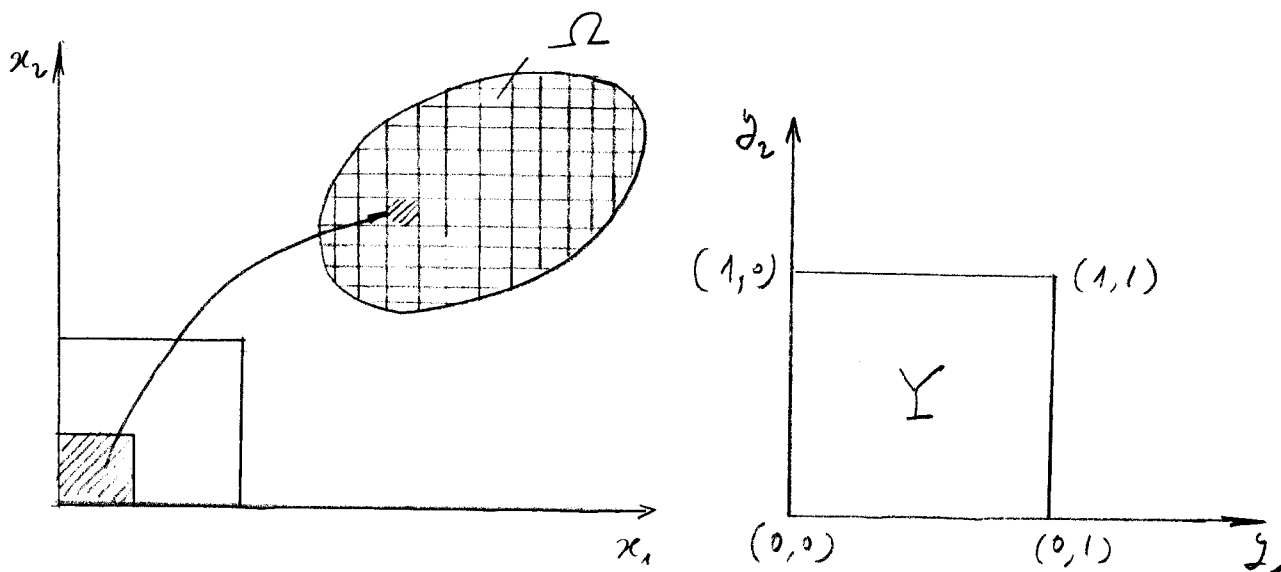


FIGURA 2 - ESTRUCTURA ε -PERIODICA DEL DOMINIO

3.- ECUACION DE LA LAJA

3.1.- ECUACION DE LA LAJA HOMOGENEA E ISOTROPA

El comportamiento estructural de una laja de dominio Ω regido por el siguiente problema de contorno en la formulación de fuerzas (función de tensión):

$$\nabla^4 \phi = \int (X_{1,22} + \nu X_{1,11}) dx_1 + \int (X_{2,11} + \nu X_{2,22}) dx_2 \quad \text{con } x_1, x_2 \in \Omega \quad (3.1)$$

con las pertinentes condiciones de borde.

La función de tensión ϕ se define en función de los esfuerzos y movimientos como sigue:

$$\begin{aligned} n_{11} &= h \sigma_{11} = \phi_{,22} - \int X_1 dx_1 = E h (u_{1,1} + \nu u_{2,2}) \\ n_{22} &= h \sigma_{22} = \phi_{,11} - \int X_2 dx_2 = E h (u_{2,2} + \nu u_{1,1}) \\ n_{12} &= h \sigma_{12} = -\phi_{,12} = E h / 2 (1 + \nu) (u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las tensiones σ_{ij} así como los esfuerzos (que corresponden a estos términos integrados a través del espesor h de la laja) se muestran en la figura 1a, con sus signos positivos. Los movimientos u_i se representan conjuntamente con las acciones distribuidas X_i en la figura 1b, con sus sentidos positivos.

Las constantes del material E y ν corresponden al módulo de Young y al coeficiente de Poisson respectivamente.

La formulación clásica en fuerza definida por la ecuación (3.1) puede sustituirse por la ecuación variacional en movimientos (formulación débil) que se describe a continuación:

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \int \left\{ \frac{E h}{1 - \nu^2} \left[(u_{1,1} + \nu u_{2,2}) u_{1,1} + (u_{2,2} + \nu u_{1,1}) u_{2,2} + \frac{1 - \nu}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})^2 \right] - \right. \\ \left. - X_1 u_1 - X_2 u_2 \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

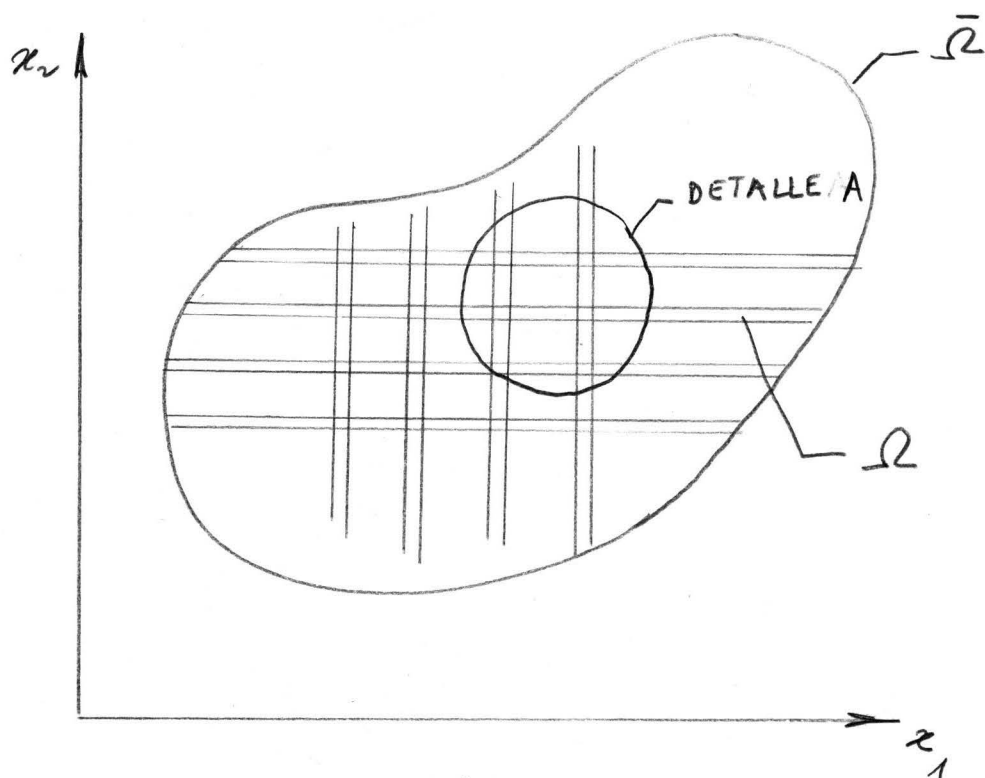
sobre un conjunto de funciones u_1 y u_2 admisibles que verifiquen las condiciones esenciales (en movimientos) en el contorno. Este funcional (3.3) se vería modificado por las pertinentes integrales de contorno conteniendo las posibles condiciones naturales o en fuerzas.

3.2.- ECUACION DE LA LAJA ORTOTROPA

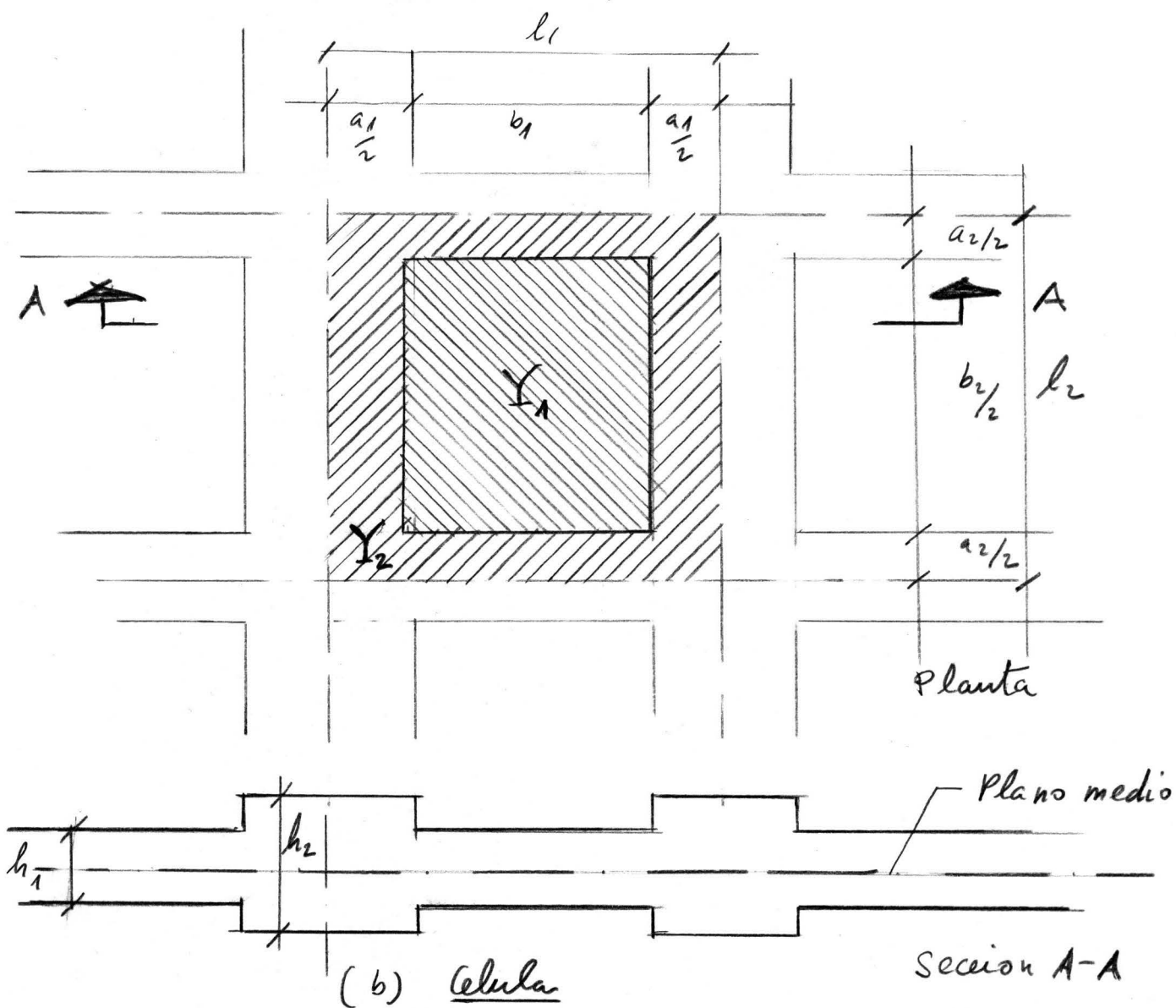
Se supone que el material es homogéneo e isotrópico con características E y ν , pero existe una distribución geométrica del mismo que permite una simulación global mediante una ecuación de laja ortotropa. El problema que se plantea reside en la obtención racional y adecuada de las constantes de ortotropía de la ecuación. Para ello, como se ha indicado, se utilizarán técnicas de homogeneización.

En el dominio Ω de la laja existe una distribución periódica de espesores en dos direcciones ortogonales (figura 3) paralelas a los ejes coordenados (x_1, x_2) situados en el plano medio de la laja.

Se considera en la figura 3 el detalle de una célula de la cuadrícula definida por sendas parejas consecutivas de variación de espesores. Se supone que las dimensiones de célula son pequeñas en comparación con las dimensiones globales de la placa. En la figura se representan estas dimensiones en planta amplificadas por el factor $1/\epsilon$, que tiene en cuenta el orden de magnitud en relación con las



(a) Losa ortótropa



(b) Celula

FIGURA 3.- LAJA ORTOTROPA

dimensiones globales de la placa. Los espesores h_1 y h_2 se suponen constantes e independientes del factor $1/\varepsilon$.

La ecuación que rige el comportamiento elástico de la laja de dominio Ω corresponde a la relación variacional de Euler:

$$\int_{\Omega} \{a^{\varepsilon}(\underline{x}) \left[(u_{1,1}^{\varepsilon} + v u_{2,2}^{\varepsilon}) v_{1,1} + (u_{2,2}^{\varepsilon} + v u_{1,1}^{\varepsilon}) v_{2,2} + \frac{1-v}{2} (u_{1,2}^{\varepsilon} + u_{2,1}^{\varepsilon}) (v_{1,2}^{\varepsilon} + v_{2,1}^{\varepsilon}) \right] - X_1 v_1 - X_2 v_2 \} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{n}_{22} v_1 dS - \int_{\Gamma_1} \bar{n}_{21} v_1 dS = 0 \quad (3.4)$$

con Γ_1 contorno de Ω en el que se especifica una condición natural (\bar{n}_{12} y \bar{n}_{22} valores conocidos de los esfuerzos).

La función $a^{\varepsilon}(\underline{x})$ se define a partir de otra $a(\underline{y})$ que corresponde a la figura 3a, es decir:

$$a(\underline{y}) \begin{cases} = \frac{E h^{(1)}}{1-v^2} & \text{para } \underline{y} \in Y_1 \text{ (dominio 1 en la figura 3a)} \\ = E \frac{h^{(2)}}{1-v^2} & \text{para } \underline{y} \in Y_2 \text{ (dominio 2 en la figura 3a)} \end{cases} \quad (3.5)$$

La función $a^{\varepsilon}(\underline{x})$ se deduce a través de la igualdad $a^{\varepsilon}(\underline{x}) = a(\frac{\underline{x}}{\varepsilon})$ (3.6) extendiéndola por periodicidad a todo Ω .

Según hipótesis de homogeneización discutida en el apartado 2, se puede escribir:

$$u^{\varepsilon} = u^0(\underline{x}) + \varepsilon u^1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 u^2(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \quad (3.7)$$

en donde $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\varepsilon}$, con $u^i(\underline{x}, \underline{y})$ ($i=1, 2$) funciones Y -periódicas.

Introduciendo la expresión (3.7) en la funcional (3.4) se deduce al considerar un análogo desarrollo asintótico formal para las funciones v_1 y v_2 las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a \{ u_{1,x_1}^0 + u_{1,y_1}^1 + v (u_{2,x_2}^0 + u_{2,y_2}^1) \} v_{1,x_1}^0 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} a \{ u_{2,x_2}^0 + u_{2,y_2}^1 + v (u_{1,x_1}^0 + u_{1,y_1}^1) \} v_{2,x_2}^0 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} a \frac{1-v}{2} \{ u_{1,x_2}^0 + u_{1,y_2}^1 + u_{2,x_1}^0 + u_{2,y_1}^1 \} (v_{1,x_2}^0 + v_{2,x_1}^0) d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} (X_1 v_1^0 + X_2 v_2^0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

dimensiones globales de la placa. Los espesores h_1 y h_2 se suponen constantes e independientes del factor $1/\varepsilon$.

La ecuación que rige el comportamiento elástico de la laja de dominio Ω corresponde a la relación variacional de Euler:

$$\int_{\Omega} \{a^{\varepsilon}(\underline{x}) \left[(u_{1,1}^{\varepsilon} + v u_{2,2}^{\varepsilon}) v_{1,1} + (u_{2,2}^{\varepsilon} + v u_{1,1}^{\varepsilon}) v_{2,2} + \frac{1-v}{2} (u_{1,2}^{\varepsilon} + u_{2,1}^{\varepsilon}) (v_{1,2}^{\varepsilon} + v_{2,1}^{\varepsilon}) \right] - X_1 v_1 - X_2 v_2 \} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{n}_{22} v_1 dS - \int_{\Gamma_1} \bar{n}_{21} v_1 dS = 0 \quad (3.4)$$

con Γ_1 contorno de Ω en el que se especifica una condición natural (\bar{n}_{12} y \bar{n}_{22} valores conocidos de los esfuerzos).

La función $a^{\varepsilon}(\underline{x})$ se define a partir de otra $a(\underline{y})$ que corresponde a la figura 3a, es decir:

$$a(\underline{y}) \begin{cases} = \frac{E h^{(1)}}{1-v^2} & \text{para } \underline{y} \in Y_1 \text{ (dominio 1 en la figura 3a)} \\ = \frac{E h^{(2)}}{1-v^2} & \text{para } \underline{y} \in Y_2 \text{ (dominio 2 en la figura 3a)} \end{cases} \quad (3.5)$$

La función $a^{\varepsilon}(\underline{x})$ se deduce a través de la igualdad $a^{\varepsilon}(\underline{x}) = a(\frac{\underline{x}}{\varepsilon})$ (3.6) extendiéndola por periodicidad a todo Ω .

Según hipótesis de homogeneización discutida en el apartado 2, se puede escribir:

$$u^{\varepsilon} = u^0(\underline{x}) + \varepsilon u^1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 u^2(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \quad (3.7)$$

en donde $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\varepsilon}$, con $u^i(\underline{x}, \underline{y})$ ($i=1,2$) funciones Y -periódicas.

Introduciendo la expresión (3.7) en la funcional (3.4) se deduce al considerar un análogo desarrollo asintótico formal para las funciones v_1 y v_2 las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a \{ u_{1,x_1}^0 + u_{1,y_1}^1 + v(u_{2,x_2}^0 + u_{2,y_2}^1) \} v_{1,x_1}^0 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} a \{ u_{2,x_2}^0 + u_{2,y_2}^1 + v(u_{1,x_1}^0 + u_{1,y_1}^1) \} v_{2,x_2}^0 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} a \frac{1-v}{2} \{ u_{1,x_2}^0 + u_{1,y_2}^1 + u_{2,x_1}^0 + u_{2,y_1}^1 \} (v_{1,x_2}^0 + v_{2,x_1}^0) d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} (X_1 v_1^0 + X_2 v_2^0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las condiciones de contorno en Y que se imponen corresponden a periodicidad.

La solución de la ecuación (3.11) se escribe del siguiente modo:

$$u_i^1 = -(u_{1,x_1}^0 + v u_{2,x_2}^0) w_i^{(1)} - (u_{2,x_2}^0 + v u_{1,x_1}^0) w_i^{(2)} - \frac{1-v}{2} (u_{1,x_2}^0 + u_{2,x_1}^0) w_i^{(3)} \quad (i=1,2) \quad (3.13)$$

Homogeneizando la ecuación (3.8) y teniendo en cuenta la (3.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ (u_{1,x_1}^0 + v u_{2,x_2}^0) \tilde{a} - (u_{1,x_1}^0 + v u_{2,x_2}^0) (\tilde{a} w_{1,y_1}^{(1)} + v \tilde{a} w_{1,y_2}^{(1)}) - (u_{2,x_2}^0 + v u_{1,x_1}^0) (\tilde{a} w_{1,y_1}^{(2)} + v \tilde{a} w_{2,y_2}^{(2)}) - \\ & - \frac{1-v}{2} (u_{1,x_2}^0 + u_{2,x_1}^0) (\tilde{a} w_{1,y_1}^{(3)} + v \tilde{a} w_{2,y_2}^{(3)}) \} v_{1,x_1}^0 d\Omega + \int_{\Omega} \{ (u_{2,x_2}^0 + v u_{1,x_1}^0) \tilde{a} - \\ & - (u_{1,x_1}^0 + v u_{2,x_2}^0) (\tilde{a} w_{2,y_2}^{(1)} + v \tilde{a} w_{1,y_1}^{(1)}) - (u_{2,x_2}^0 + v u_{1,x_1}^0) (\tilde{a} w_{2,y_2}^{(2)} + v \tilde{a} w_{1,y_1}^{(2)}) - \\ & - \frac{1-v}{2} (u_{1,x_2}^0 + u_{2,x_1}^0) (\tilde{a} w_{2,y_2}^{(3)} + v \tilde{a} w_{1,y_1}^{(3)}) \} v_{2,x_2}^0 d\Omega + \frac{1-v}{2} \int_{\Omega} \{ u_{1,x_2}^0 + u_{2,x_1}^0 \} \tilde{a} - \\ & - (u_{1,x_1}^0 + v u_{2,x_2}^0) (\tilde{a} w_{1,y_2}^{(1)} + v \tilde{a} w_{2,y_1}^{(1)}) - (u_{2,x_2}^0 + v u_{1,x_1}^0) (\tilde{a} w_{1,y_2}^{(2)} + v \tilde{a} w_{2,y_1}^{(2)}) - \\ & - \frac{1-v}{2} (u_{1,x_2}^0 + u_{2,x_1}^0) (\tilde{a} w_{1,y_2}^{(3)} + v \tilde{a} w_{2,y_1}^{(3)}) \} (v_{1,x_2}^0 + v_{2,x_1}^0) d\Omega - \int_{\Omega} (X_1 v_1^0 + X_2 v_2^0) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente los términos se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_{1,1}^0 \{ (\tilde{a} - \tilde{a} w_{1,1}^{(1)} - v \tilde{a} w_{2,2}^{(1)} - v \tilde{a} w_{1,1}^{(2)} - v^2 \tilde{a} w_{2,2}^{(2)}) u_{1,1}^0 + (\tilde{a} - v \tilde{a} w_{1,1}^{(1)} - v^2 \tilde{a} w_{2,2}^{(1)} - \tilde{a} w_{1,1}^{(2)} - v \tilde{a} w_{2,2}^{(2)}) u_{2,2}^0 - \\ & - \frac{1-v}{2} (\tilde{a} w_{1,1}^{(3)} + v \tilde{a} w_{2,2}^{(3)}) (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) \} d\Omega + \int_{\Omega} v_{2,2}^0 \{ (v \tilde{a} - v \tilde{a} w_{2,2}^{(2)} - v^2 \tilde{a} w_{1,1}^{(2)} - \tilde{a} w_{2,2}^{(1)} - v \tilde{a} w_{1,1}^{(1)}) u_{1,1}^0 + \\ & + (\tilde{a} - \tilde{a} w_{2,2}^{(2)} - v \tilde{a} w_{1,1}^{(2)} - v \tilde{a} w_{2,2}^{(1)} - v^2 \tilde{a} w_{1,1}^{(1)}) u_{2,2}^0 - \frac{1-v}{2} (\tilde{a} w_{2,2}^{(3)} + v \tilde{a} w_{1,1}^{(3)}) (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) \} d\Omega + \\ & + \frac{1-v}{2} \int_{\Omega} (v_{1,2}^0 + v_{2,1}^0) \{ (-\tilde{a} w_{1,2}^{(1)} - \tilde{a} w_{2,1}^{(1)} - v \tilde{a} w_{1,2}^{(2)} - v \tilde{a} w_{2,1}^{(2)}) u_{1,1}^0 + (-\tilde{a} w_{1,2}^{(2)} - \tilde{a} w_{2,1}^{(2)} - v \tilde{a} w_{1,2}^{(1)} - \\ & - v \tilde{a} w_{2,1}^{(1)}) u_{2,2}^0 + (\tilde{a} - \frac{1-v}{2} (\tilde{a} w_{1,2}^{(3)} + \tilde{a} w_{2,1}^{(3)})) (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) \} d\Omega - \int_{\Omega} (X_1 v_1^0 + X_2 v_2^0) d\Omega = 0 \quad (3.14) \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) SAMARTIN, A. "Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón" Edit. Rueda, 1983.
- (2) BENSOUSSAN, LIONS, PAPA NICOLAU. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North. Holland, 1978.
- (3) SANCHEZ PALENCIA. Non homogenous Media and Vibration Theory Lectures Notes in Physics. Springer. Verlag 1980.
- (4) BOURGAT. Numerical Experiments of the homogeneization method for operators with Periodic coefficients. R.R. I.N.R.I.A., 1978.
- (5) BOURGAT DERNIEUX. Numerical experiments of the homogeneization method for operators with Periodic coefficients.